

ED SMAER

Sujet de thèses 2013

Laboratoire : UMR IRCAM CNRS 9912 : Institut de Recherche et de Coordination
Acoustique Musique

Équipe : Acoustique Instrumentale ; <http://www.ircam.fr/instr.html>

Etablissement de rattachement : UPMC Université de Paris VI

Directeur de thèse : René Caussé, (Joël Bensoam), Chargés de recherche (causse@ircam.fr,
bensoam@ircam.fr)

Co-encadrement : Jean Lerbet, Professeur (jean.lerbet@ibisc.univ-evry.fr)

Titre de la thèse : « Géométrisation » de l'acoustique : étude de la propagation non linéaire à l'aide de la géométrie différentielle

Collaborations dans le cadre de la thèse : Université d'Evry val d'Essonne UFR Sciences et Technologies 40 rue du Pelvoux CE 1455 Courcouronnes 91020 Evry Cedex

Résumé du sujet :

L'utilisation de la géométrie différentielle se révèle être un outil très fécond pour les théories de la physique. En fait depuis que Maupertius (aidé d'Euler) postula en 1744 le principe de moindre action¹ jusqu'au concept de "connexion" d'Elie Cartan (1924), l'évolution de la géométrie différentielle est inextricablement liée aux travaux de physiciens et mathématiciens aussi illustres que Lagrange, Jacobi, Hamilton, Riemann, Poincaré, Noether Einstein, et aujourd'hui Marsden ou Arnold. La plupart des équations fondamentales - en mécanique classique, en électromagnétisme, en relativité générale et en théorie quantique des champs- peuvent être formulées à partir de ce principe (indémontrable) de moindre action. A travers la démarche géométrique se sont les propriétés intrinsèques des phénomènes (noumènes ?) qui intéressent ces scientifiques indépendamment de tous choix de repères (invariance par changement de systèmes de coordonnées) et c'est cette préoccupation qui confère à leurs théories une dimension universelle.

Bien que l'acoustique soit une des disciplines de la mécanique sa "géométrisation" est encore limitée à quelques domaines (mécanique des fluides, ultra sons, phonons,...). A l'instar de travaux sur la propagation non linéaire dans les poutres de Reissner, il semble qu'une réappropriation des théories de l'acoustique à travers les concepts de la géométrie différentielle puisse permettre d'appréhender les phénomènes non linéaires dans leurs qualités intrinsèques. Il s'en suit un domaine de recherche visant à établir et à résoudre des modèles dynamiques expurgés de toute non-linéarité artificielle en tirant partie des propriétés de symétrie sous-jacente par l'utilisation de groupes de Lie.

¹ « L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Être suprême : lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible. »

Sujet développé

Le contexte de ce sujet de thèse est celui de la propagation non linéaire d'ondes dans des milieux élastiques unidimensionnels formalisé à l'aide du modèle de poutre de Reissner [8,13,15,16,17,18,20] (il est aussi envisagé l'extension de ce modèle dans le cas bidimensionnel). Dans ce contexte, les grands déplacements sont à l'origine des non-linéarités géométriques et se formalisent par l'écriture de la dynamique sous la forme des équations d'Euler Poincaré [3,7] dans l'algèbre de Lie du groupe de symétrie considéré. Bien que ces équations puissent être résolues numériquement [11,13], il semble plus fructueux de suivre les conseils et la démarche de Louis Poinso [1] qui dès 1851, reprenant, après Lagrange [2], l'étude de la rotation d'un corps abandonné à lui-même, écrivait :

«... et l'on sait que depuis, l'illustre Lagrange a repris ce fameux problème², pour l'approfondir et le développer à sa manière, je veux dire par une suite de formules et de transformation analytiques qui présentent beaucoup d'ordre et de symétrie. Mais il faut convenir que, dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs, sans aucune image nette de la rotation du corps. On peut bien, par ces calculs plus ou moins longs et compliqués, parvenir à déterminer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps donné ; mais on ne voit point comment le corps y arrive : on le perd entièrement de vue ; tandis qu'on voudrait l'observer et le suivre, pour ainsi dire, des yeux dans tout le cours de sa rotation. »

Ce qui le conduisit à formuler ce qu'on désigne aujourd'hui le théorème de Poinso [10]:

« Considérez le centre de gravité du corps, ou, si le corps n'est pas libre, le point fixe qui fait le centre de sa rotation. Autour de ce point, et sur les directions principales des trois axes principaux d'inertie qui s'y rapportent, imaginez un ellipsoïde construit avec trois axes de longueurs réciproques aux BRAS DE L'INERTIE du corps autour des mêmes axes; et faites maintenant abstraction de la figure du corps pour n'y plus voir que celle de l'ellipsoïde que j'ai nommé l'ELLIPSOÏDE CENTRAL.

Si vous supposez que cet ellipsoïde, dont le centre est maintenu immobile au même point de l'espace, roule sans glisser sur un plan fixe avec lequel on l'a mis en contact, vous aurez la représentation exacte du mouvement géométrique que suit le corps en vertu du couple qui l'a frappé dans le plan fixe que l'on considère: et si vous ajoutez que la vitesse angulaire avec laquelle il tourne à chaque instant sur le rayon mené du centre au point de contact, est proportionnelle à la longueur même de ce rayon, vous aurez à la fois le mouvement géométrique et dynamique de ce corps... »

Dans le langage moderne, Arnold [4] exprime le problème sous la forme :

« Les mouvements eulériens du corps rigide sont les géodésiques du groupe des rotations de l'espace euclidien à trois dimensions, muni d'une métrique invariante à gauche. »

La solution proposée par Poinso s'applique donc à un problème mécanique pour lequel il existe une invariance par rotation. L'ellipsoïde est la représentation géométrique de l'énergie cinétique et le plan invariable sur lequel roule cet ellipsoïde correspond à la conservation du moment cinétique. Le moment cinétique est précisément la « fonction moment » (momentum map) associée au groupe des rotations : $SO(3)$. Notons enfin, que la solution du problème correspond aussi à l'intersection de l'ellipsoïde avec les orbites co-adjointes du groupe $SO(3)$.

Dans cet exemple simple, le mouvement du plan tangent à l'ellipsoïde d'énergie peut être envisagé dans le cadre de la théorie des connexions affines d'Elie Cartan [5,6] et fournit un

² Poinso fait référence aux équations différentielles régissant le mouvement d'un corps rigide qu'Euler avait établi en 1765.

cadre plus général dans lequel le théorème de Poincaré peut être reconsidéré. Cette identification doit permettre l'étude de systèmes régis par d'autres groupes de Lie³ -autre que SO(3)- et constitue l'axe principal du travail de thèse proposé.

« Every mathematical discipline goes through three periods of development: the naive, the formal, and the critical. » - David Hilbert.

Références

- [1] L. Poincaré, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. (1851)
- [2] J.L. Lagrange, *Oeuvres complètes*, Jacques Gabay, 1998.
- [3] H. Poincaré, *Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique*, Compte rendu de l'académie des sciences de Paris, Vol. 132, pp. 369-371, 1901.
- [4] V.I. Arnold, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Annales de l'institut J. Fourier, Vol. 16(1), pp. 319-361, 1966.
- [5] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile*, Gautier-Villar, 1937.
- [6] E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie)*, Annales scientifiques de l'ENS 3^e série, tome 40, pp. 325-412, 1923
- [7] E. et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris, 1909.
- [8] F. Boyer, D. Primault, *Poincaré-Chetayev equations for flexible manipulators*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics (JAMM), 2005
- [9] R. Coquereaux, *Espaces Fibrés et Connexions*, Cours de Physique Mathématique de Luminy, Marseilles, 2002.
- [10] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, Springer, 1999.
- [11] L. Godinho, J. Natário, *An Introduction to Riemannian Geometry, with application to mechanics and relativity*, www.math.ist.utl.pt/~jnatar/geometria_sem_exercicios.pdf
- [12] D. Roze, *Simulation de la propagation d'onde non linéaire par les séries de Volterra*. Thèse en Acoustique musicale. Paris : Université de Paris VI, 2010.
- [13] J. Bensoam, D. Roze, *Modelling and numerical simulation of strings based on lie groups and algebras applications to the nonlinear dynamics of Reissner Beams*. International Congress on Acoustics. Madrid : Septembre 2007
- [14] A. Ibrahimbegovic, *On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 122 (1995) 11-26
- [15] E. Reissner, *On finite deformations of space curved beams*, J. Appl. Math. Phys., 32 (1981) 734-744.
- [16] J.C. Simo, *A finite strain beam formulation-the three-dimensional dynamic problem, Part I*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 49 (1985) 55-70.
- [17] E. Reissner, *On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem*, J. Appl. Math. Phys., 23 (1972) 795-804.
- [18] J.C. Simo, *The (symmetric) Hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics: intrinsic definition and geometric interpretation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 96 (1992) 189-200.
- [19] N.E. Leonard, J.E. Marsden, *Stability and drift of underwater vehicle dynamics:*

³ Cette identification a été réalisé avec succès dans le cadre de mouvement de corps rigide du plan, i.e, pour le groupe SE(2), connu pour être l'un des cas complètement intégrable des mouvement de corps rigides dans l'eau (under water vehicle) [19].

Mechanical systems with rigid motion symmetry, Physica D: Nonlinear Phenomena Volume 105, Issues 1-3, 15 June 1997, Pages 130-162.

[20] J. Lerbet, *Non linear Dynamics of Curvilinear Systems. A new coordinateless approach*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 69 (2005) 917-924).